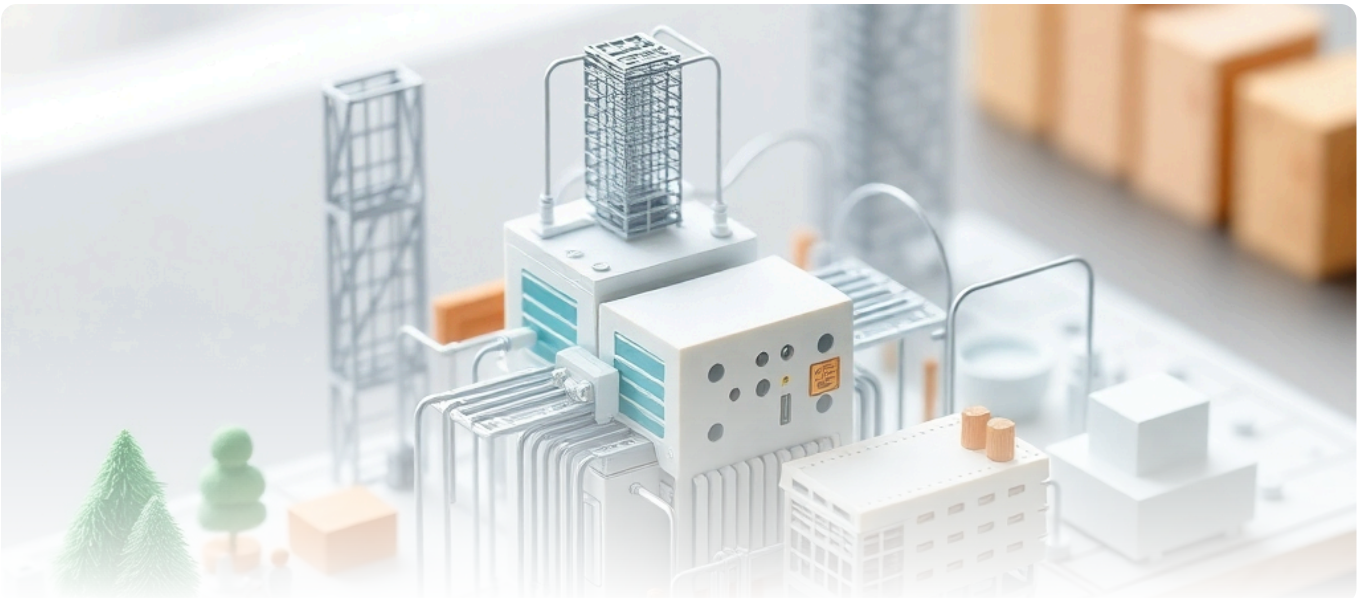


Unidad 2 Modelos Matemáticos Básicos

Tabla de contenido

Ecuaciones algebraicas y diferenciales simples

Ecuaciones Algebraicas en Modelado

Los modelos matemáticos algebraicos son representaciones abstractas que utilizan ecuaciones, inecuaciones, polinomios, funciones y estructuras algebraicas para describir relaciones cuantitativas en sistemas reales o teóricos. Estos modelos se emplean en diversas áreas como la física, economía, ingeniería, biología y ciencias sociales.

1. **Ecuaciones Lineales**

   Forma: $ax + b = 0$ (Una variable) o $ax + by = c$ (Dos variables)
   Usos: Modelos de costos, modelo de regresión lineal, movimiento rectilíneo uniforme, circuitos resistivos, equilibrio de fuerzas

   - Representan relaciones proporcionales.
   - Ejemplo:

   $$y = mx + b$$

     (modelo de regresión lineal).

   Ejemplo: Si un producto cuesta $20 más $5 por unidad, el costo total es $C = 5x + 20$
2. **Ecuaciones Cuadráticas**

   Forma: $ax^2 + bx + c = 0$
   Usos: Trayectorias parabólicas (lanzamiento de proyectiles)
   Ejemplo:
   La altura $h(t)$ de un objeto lanzado es $h(t) = -4.9t2 + v_0 t + h_0$
3. **Sistemas de Ecuaciones**
   Forma: Múltiples ecuaciones con varias incógnitas. $\begin{Bmatrix} AxBy = C \\ DxEy = F \end{Bmatrix}$
   Usos: Equilibrio de mercados (oferta y demanda), redes eléctricas. Balance de masas en ingeniería química.
   Ejemplo:

   $$\begin{Bmatrix} 2x + 3y = 10 \\ 4x - y = 5 \end{Bmatrix}$$

4. Ecuaciones polinómicas
   Forma: Grado superior (x3,x4x3,x4, etc.).
   Aplicación: Modelos de crecimiento poblacional, química.

Pasos para construir un modelo algebraico

1. **Identificar las variables** (ej.: tiempo, distancia, precio).
2. **Establecer relaciones** entre variables (ej.: proporcionalidad, sumas).
3. **Plantear la ecuación** que represente dicha relación.
4. **Resolver** (despejar variables) o **simular** el modelo.

Ejercicio práctico: Modelo de ganancias

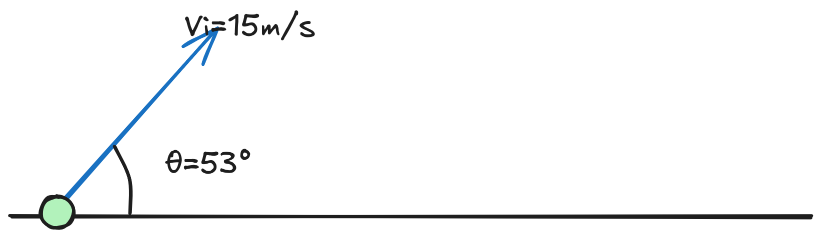
Importancia en ciencias e ingeniería

- **Física**: Leyes de Newton, cinemática.
- **Economía**: Oferta-demanda, maximización de utilidades.
- **Biología**: Crecimiento de poblaciones (modelos logísticos).

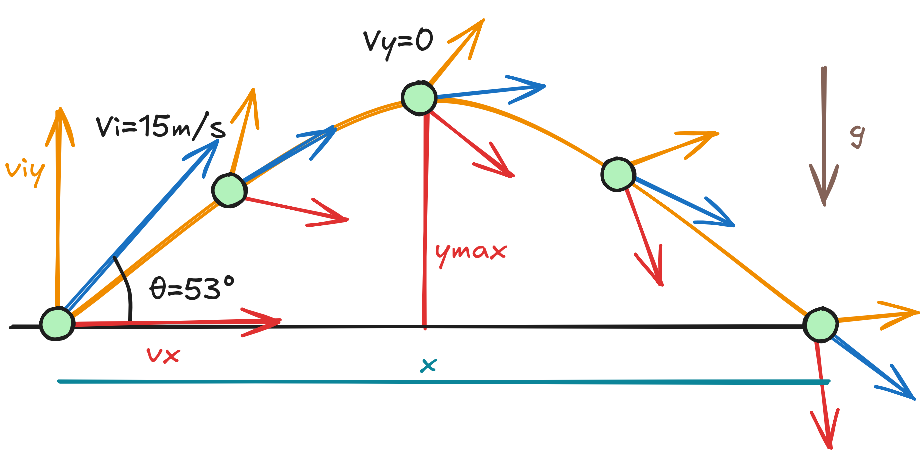
Ejemplo práctico 2 de ecuaciones algebraicas
Trayectorias parabólicas
Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Movimiento parabólico

Se lanza una pelota a cierta distancia.
Calcular el pico máximo



Tiempo máximo
Tiempo total de vuelo
altura máxima vertical
altura máxima horizontal



obteniendo Viy

$$V_{iy} = V_i \operatorname{Sen} 53°$$

$$V_{iy} = 15 m/s \cdot \operatorname{Sen} 53°$$

$$V_{iy} = V_i \operatorname{Sen} \theta$$

$V_{iy} = 11.98\ m/s$

obteniendo Vx

$V_x = V_i \cos 53°$

$V_x = V_i \cos \theta$

$V_x = 15\ m/s \cdot \cos 53°$

$V_x = 9.03\ m/s$

Obtenemos tiempo respecto a Velocidad en Vy=0
tomamos en cuenta la gravedad

$V_y = V_{iy} + at$

$V_y = V_{iy} + at$

$t_s \rightarrow$ tiempo de subida

$0 = 11.98 - 9.81 t_s$

$9.81 = 11.98$

$$t_s = \frac{11.98\ \cancel{m/s}}{9.81\ \cancel{m}/s^2}$$

$t_s = 1.22\ seg \rightarrow$ tiempo de inicio al punto más alto

Obtenemos la altura máxima

$V_y^2 = V_{iy}^2 + 2gy_{max}$

$V_y^2 = V_{iy}^2 + 2gy_{max}$

$0 = (11.98)^2 + 2(-9.81)\,y_{max}$

$0 = 143.52 - 19.6\,y_{max}$

$19.6\,y_{max} = 143.52$

$$y_{max} = \frac{143.52}{19.6}$$

$$y_{max} = 7.32\,m \longrightarrow$$ Altura máxima

Obtenemos el tiempo total de subida y bajada

$$t_T = 2t_s$$

$$t_T = 2t_s$$

$$t_T = 2(1.22\,seg)$$

$$t_T = 2.44\,seg$$

obtener desplazamiento en horizontal

$$X = V_x \cdot t_T$$

$$X = V_x \cdot t_T$$

$$X = (9.03)\cdot(2.44)$$

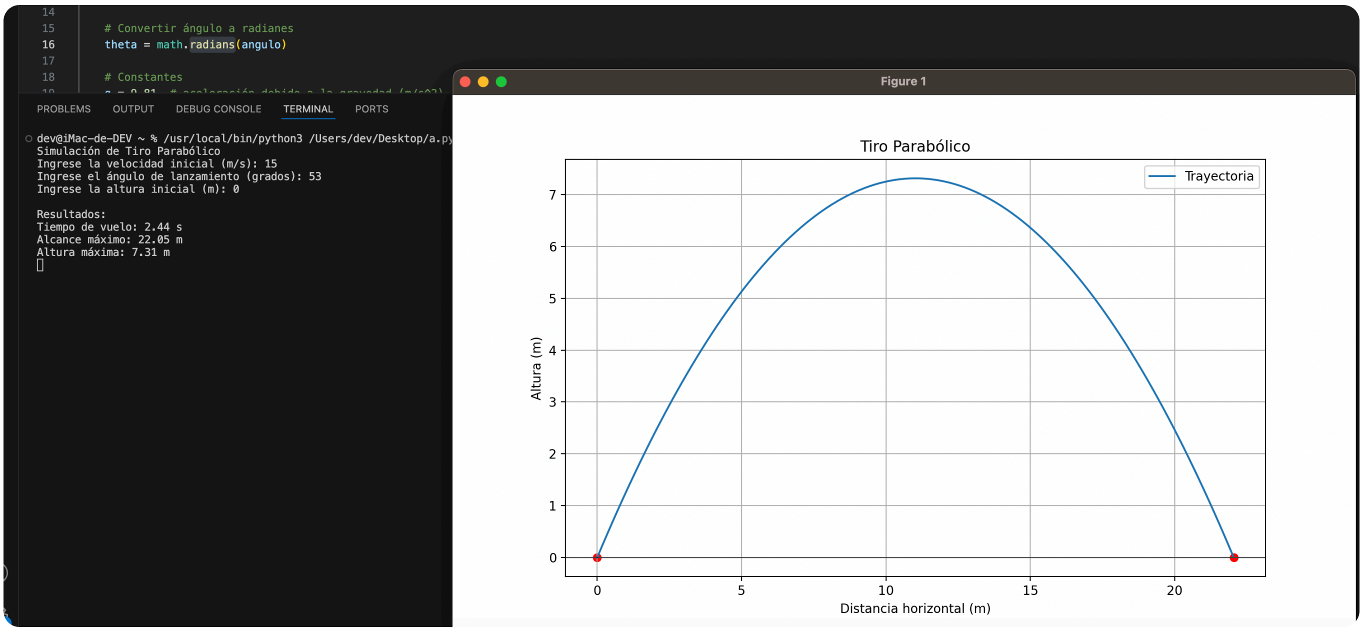
$$X = 22.03\,m$$

Código

```python
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def tiro_parabolico():
    # Datos de entrada
    print("Simulación de Tiro Parabólico")
    try:
        v0 = float(input("Ingrese la velocidad inicial (m/s): "))
        angulo = float(input("Ingrese el ángulo de lanzamiento (grados): "))
        h0 = float(input("Ingrese la altura inicial (m): "))
    except ValueError:
        print("Error: Por favor ingrese valores numéricos válidos.")
        return
```

```python
# Convertir ángulo a radianes
theta = math.radians(angulo)

# Constantes
g = 9.81  # aceleración debido a la gravedad (m/s^2)

# Componentes de la velocidad inicial
v0x = v0 * math.cos(theta)
v0y = v0 * math.sin(theta)

# Tiempo de vuelo (considerando altura inicial)
t_vuelo = (v0y + math.sqrt(v0y**2 + 2 * g * h0)) / g

# Alcance máximo
alcance = v0x * t_vuelo

# Altura máxima
t_altura_max = v0y / g
altura_max = h0 + v0y * t_altura_max - 0.5 * g * t_altura_max**2

# Generar datos para la gráfica
tiempo = []
x_pos = []
y_pos = []

dt = 0.01  # paso de tiempo
t = 0
while t <= t_vuelo:
    tiempo.append(t)
    x = v0x * t
    y = h0 + v0y * t - 0.5 * g * t**2
    x_pos.append(x)
    y_pos.append(y)
    t += dt

# Resultados
print("\nResultados:")
print(f"Tiempo de vuelo: {t_vuelo:.2f} s")
print(f"Alcance máximo: {alcance:.2f} m")
print(f"Altura máxima: {altura_max:.2f} m")

# Gráfica
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(x_pos, y_pos, label='Trayectoria')
plt.scatter([0, alcance], [h0, 0], color='red')  # Puntos inicial y final
plt.title("Tiro Parabólico")
```

```python
    plt.xlabel("Distancia horizontal (m)")
    plt.ylabel("Altura (m)")
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)  # Eje x
    plt.show()

if __name__ == "__main__":
    tiro_parabolico()
```



Ecuaciones Diferenciales en Modelado

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta esencial en el modelado matemático de sistemas dinámicos, donde las variables cambian con respecto a otras (como el tiempo, la posición, etc.). A diferencia de las ecuaciones algebraicas, que describen relaciones estáticas, las ecuaciones diferenciales modelan tasas de cambio y comportamientos en evolución.

Las ecuaciones diferenciales relacionan una función con sus derivadas y se usan en sistemas dinámicos (que evolucionan con el tiempo).

¿Qué es una ecuación diferencial?

Se trata de una fórmula matemáticas que vincula una función con sus derivadas. En el campo de la matemática aplicada, generalmente las funciones simbolizan cantidades físicas, las derivadas simbolizan sus razones de variación y la ecuación establece la relación entre ambas. [1]

Una ecuación que relaciona una función con sus derivadas. Puede ser:

- **Ordinaria (EDO)**: Si depende de una sola variable independiente (ej.: tiempo tt).
- **Parcial (EDP)**: Si depende de múltiples variables (ej.: espacio xx y tiempo tt).

Forma general de una EDO:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Usos: Describe el crecimiento /decaimiento exponencial (Poblaciolnes,radiactividad)

Clasificación de Ecuaciones diferenciales

- Por tipo
- Por orden
- Por linealidad

Por tipo

Ordinarias (EDO): Una variable independiente (ej: el tiempo t).

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

Parciales (EDP): Múltiples variables independientes (ej: espacio x y tiempo t).

Por orden

Primer orden:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y)$$

Segundo orden:

$$a^2 \frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Por linealidad

**Lineales

**No lineales

Aplicaciones en el modelado de sistemas

Ingenieria:

Circuitos eléctricos:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = V(t)$$

(L: Inductancia, R: resistencia, C:capasitancia)

Mecanica de fluidos

Biología:

Crecimiento de poblaciones:
**Modelo logístico:

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - \frac{P}{K})$$

(K: capacidad de carga).

Epidemiología (Modelo SIR):

$$\{\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \frac{dt}{dI} = \beta SI - \gamma I, \frac{dt}{dR} = \gamma I.rcl\}$$

(S: susceptibles, I: infectados, R: recuperados).

Economía:

- Crecimiento económico (Modelo de Solow):

$$\frac{dk}{dt} = sf(k) - \delta k$$

  (k: capital per cápita, s: tasa de ahorro).

Física:

- Ley de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tambiente)$$

- Movimiento armónico simple:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

  (Solución: x(t)=Acos(ωt+ϕ)x(t)=Acos(ωt+ϕ)).

Métodos de Solución (EDOs)

---

a) Separables:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$$

Ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow ln \mid y \mid = \frac{x^2}{2} + C$$

b) Lineales de primer orden:

$$y\prime + P(x)y = Q(x)$$

Factor integrante: $\mu(x) = e \int P(x) dx \mu(x) = e \int P(x) dx.$

Ejemplo 1: Crecimiento Poblacional (Modelo Malthusiano)

Ejemplo 2: Ley de Enfriamiento de Newton

Ejemplo 3: Circuito RC (Descarga de un Capacitor)

Ley de enfriamiento de newton

La **Ley de Enfriamiento de Newton** describe cómo la temperatura de un objeto cambia con el tiempo cuando está en contacto con un medio ambiente a una temperatura diferente. La ley establece que:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Donde:

- $T(t)$ = Temperatura del objeto en el tiempo t.
- T_a = Temperatura constante del ambiente (temperatura exterior).
- k = Constante de proporcionalidad (depende del material y las condiciones de enfriamiento).
- $\frac{dT}{dt}$ = Tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

  Si una taza de café a 75$°C$ se coloca en una habitación a 24$°C$ y después de 3 minutos está a 61$°C$, podemos calcular k:

tiempo(t)	**Temperatura(T)**
0 min	75° C
3 min	61° C

formula

$$\frac{dT}{dt} - K(T - T_a) = \emptyset \longrightarrow \frac{dT}{dt} = K(T - T_a).$$

variables separables

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_a) \rightarrow \frac{dT}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = K(T - T_a)\, dt \rightarrow dT = K(T - T_a)\, dt$$

$$dT = K(T - T_a)\, dt \rightarrow \frac{dT}{(T - T_a)} = \frac{K\cancel{(T - T_a)}\, dt}{\cancel{(T - T_a)}}$$

$$\frac{dT}{T - T_a} = K\, dt$$

integramos las variables

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = \int K dt \rightarrow \int \frac{dT}{T - T_a} = K \int dt$$

$$\ln|T - T_a| = Kt + C \rightarrow e^{\ln|T - T_a|} = e^{Kt + C}$$

$$T - T_a = e^{kt} \cdot C$$

$$e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$$

$$e^{kt+c} = e^{kt} \cdot c$$

$$e^{c} = C$$

despejamos a T

$$T - T_a = + T_a + Ce^{kt} \rightarrow T = T_a + Ce^{kt}$$

Calculamos valor de c y k

$$T = 24^{\circ} + Ce^{kt} \qquad T_a = 24^{\circ}$$

calculamos el valor de t0 en la formula

$$T_0 = 75^\circ$$
$$T_3 = 61^\circ$$

$$75^\circ = 24^\circ + C\cancel{e^{k(0)}}$$
$$75^\circ = 24^\circ + C$$
$$75^\circ - 24^\circ = C$$
$$C = 51$$

$$61^\circ = 24^\circ + 51\, e^{k(3)}$$
$$\frac{61^\circ - 24^\circ}{51} = e^{k(3)}$$
$$\frac{37}{51} = e^{3k}$$
$$\ln\left(\frac{37}{51}\right) = \ln\left(e^{3k}\right)$$
$$-0.32090 = 3k$$
$$\frac{-0.32090}{3} = k$$
$$\therefore -0.106966 = k$$

obtenemos el modelo de nuestro caso

$$T = 24 + 51\, e^{-0.106966\, t}$$

Calculamos la temperatura al cabo de 18 min

$$T = 24 + 51\, e^{-0.106966(18)}$$

$$T = 31.5\,°C$$

PYTHON

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def ley_enfriamiento_newton(T0, Ta, k, t):
    """
    Calcula la temperatura en función del tiempo según la Ley de Enfriamiento

    Parámetros:
    T0 : float - Temperatura inicial del objeto
    Ta : float - Temperatura ambiente (constante)
    k : float - Constante de enfriamiento (positiva)
    t : float or array - Tiempo(s) para calcular la temperatura

    Retorna:
    Temperatura(s) en el/los tiempo(s) t
    """
    return Ta + (T0 - Ta) * np.exp(-k * t)

# Parámetros de ejemplo
T0 = 75.0   # Temperatura inicial del objeto (°C)
Ta = 24.0    # Temperatura ambiente (°C)
k = 0.106      # Constante de enfriamiento
tiempo_especifico = 18 #Tiempo a acalcular

# Crear array de tiempos
tiempos = np.linspace(0, 50, 100)

# Calcular temperaturas
temperaturas = ley_enfriamiento_newton(T0, Ta, k, tiempos)

# Graficar
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(tiempos, temperaturas, 'b-', label=f'T(t) = {Ta} + ({T0}-{Ta})e^(-{k
plt.axhline(y=Ta, color='r', linestyle='--', label=f'Temperatura ambiente ({T
plt.title('Ley de Enfriamiento de Newton')
plt.xlabel('Tiempo (min)')
plt.ylabel('Temperatura (°C)')
```

```
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

# Ejemplo de cálculo para un tiempo específico
temp_especifica = ley_enfriamiento_newton(T0, Ta, k, tiempo_especifico)
print(f"\nDespués de {tiempo_especifico} minutos, la temperatura es: {temp_es
```

Comparación entre Modelos Algebraicos y Diferenciales

Característica	Ecuaciones Algebraicas	Ecuaciones Diferenciales
Variables	Relaciones estáticas	Relaciones dinámicas (tiempo)
Solución	Valores fijos	Funciones dependientes del tiempo
Aplicación típica	Equilibrio, leyes instantáneas	Evolución de sistemas (física, biología)

**Modelos lineales y no lineales

Modelos Lineales

Estos modelos asumen que la relación entre las variables independientes (predictores) y la variable dependiente (respuesta) es lineal.
Ecuación general:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \ldots + \beta_n x_n + C$$

Donde:

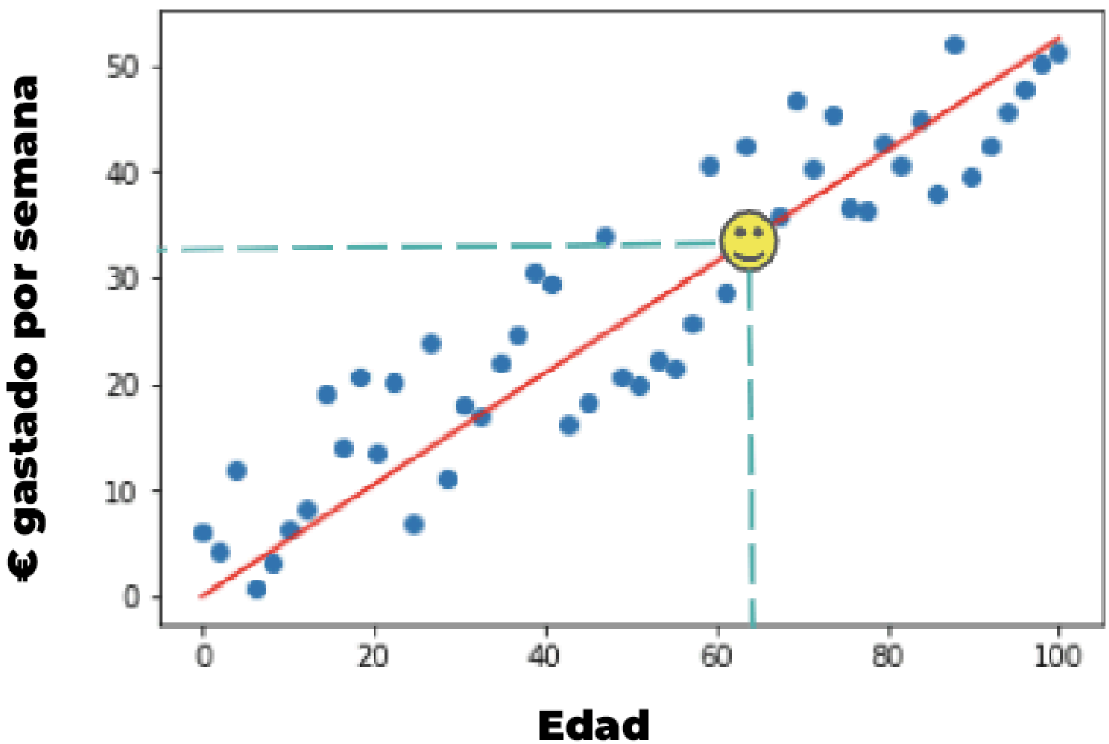
- y: Variable dependiente.
- xi: Variables independientes.
- βi: Coeficientes (parámetros del modelo).
- ϵ: Error aleatorio.

Ejemplos:

- Regresión lineal simple/múltiple.
- ANOVA.
- Modelos de vectores de soporte (SVM lineal).

Ventajas:
✅ Fáciles de interpretar (los coeficientes βiβi indican el impacto de cada predictor).
✅ Rápidos de entrenar y computacionalmente eficientes.
✅ Funcionan bien con datos de baja dimensionalidad.

Limitaciones:
❌ No capturan relaciones complejas (ej: interacciones no lineales).
❌ Sensibles a outliers y multicolinealidad.



[1-1]

Modelos No Lineales

Estos modelos permiten relaciones más complejas entre variables, como polinomios, exponenciales o interacciones no aditivas.

Ecuación general (ejemplo polinómico):

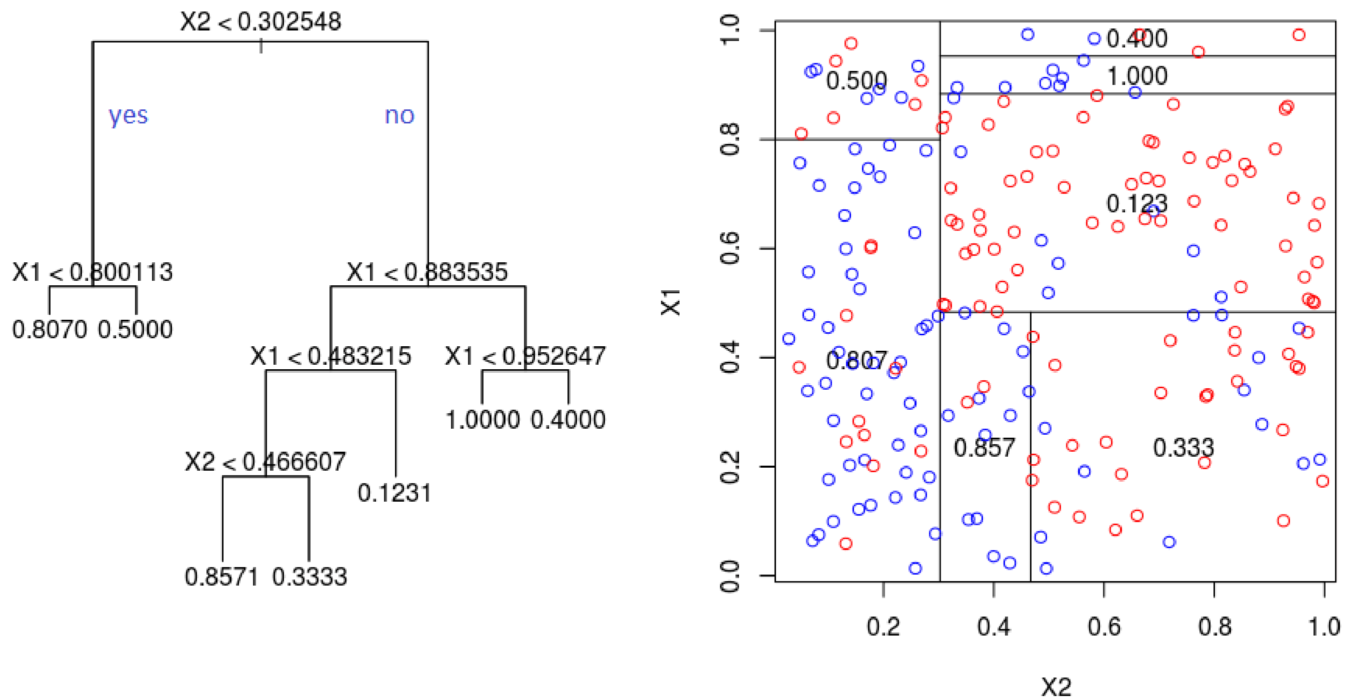
$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \epsilon$$

Ejemplos:

- Regresión polinominal.
- Árboles de decisión, Random Forest.
- Redes neuronales.
- SVM con kernels no lineales (ej: RBF).
- Modelos de series de tiempo no lineales (ej: ARIMA con componentes no lineales).

Ventajas:
✅ Capturan patrones complejos en los datos.
✅ Mayor flexibilidad para ajustarse a relaciones reales.
✅ Útiles en problemas de alta dimensionalidad (ej: imágenes, texto).

Limitaciones:
❌ Difíciles de interpretar ("caja negra").
❌ Riesgo de sobreajuste (*overfitting*) si no se regulan.
❌ Requieren más datos y potencia computacional.



[1-2]

Comparación entre Modelos Lineales y No Lineales

Propiedad	Modelos Lineales	Modelos No Lineales
Principio de superposición	✅ Cumple $f(x+y) = f(x) + f(y)$	❌ No cumple (interacciones complejas)
Soluciones analíticas	✅ Fáciles (matrices, transformadas)	❌ Difíciles (requieren aproximaciones)
Comportamientos típicos	Soluciones exponenciales/sinusoidales	Caos, oscilaciones, múltiples equilibrios

Propiedad	Modelos Lineales	Modelos No Lineales
Aplicaciones	Circuitos eléctricos, vibraciones pequeñas	Clima, biología, economía, fluidos

¿Cuándo Usar Cada Uno?

- **Lineales**: Cuando el sistema opera en un rango pequeño (ej: pequeñas oscilaciones de un péndulo $sin\theta \approx \theta$).
- **No lineales**: Cuando las interacciones son complejas (ej: dinámica de poblaciones, reacciones químicas, sistemas caóticos).

---

1. Obtenido de https://fhernanb.github.io/libro_mod_pred/arb-de-regre.html el día 14/06/2025 ↩ ↩ ↩